Mathematik-Teil der Prüfung Mathematik III im Herbst 2005

Vorlesung *Mathematik III mit Systemanalyse* von Dr. P. Thurnheer.

Aufgaben:

1. Stellen Sie die Funktion $f(x) = 1 + |x|$ auf dem Intervall $-\pi < x < \pi$ durch ihre Fourierreihe dar. Konvergiert die Fourierreihe für f an der Stelle $x = \pi$? Wenn ja, warum?
   Hinweis: Studieren Sie zuerst die Funktion $f^*(x) = f(x) - 1$.

2. Bestimmen Sie durch Separation der Variabeln die allgemeine Form aller für $x \in [0, \pi]$ und $t \in \mathbb{R}$ definierten Funktionen $u(x, t)$, für welche gilt

$$(\operatorname{tg} x)\, u_x(x,t) - u_{tt}(x,t) = 0, \quad \text{und}$$

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \quad \text{für alle } x \in [0,\pi].$$

   Hinweis: $1/\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$ ist von der Form $g'(x)/g(x)$.

Bitte wenden!

Lösungen:

1. Setzen Sie $f^*(x) := f(x)-1 = |x|$. $f^*(x)$ ist eine gerade Funktion (bezüglich 0), darum:

$$
\begin{aligned}
b_k^* &= 0 \text{ für alle } k \\
a_0^* &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f^*(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x dx = \pi \\
a_k^* &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f^*(x)\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}\frac{1}{k^2}\int_0^{k\pi} y\cos y dy = \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{1}{k^2}\Big(\underbrace{\Big[y\sin y\Big]_0^{k\pi}}_{=0} - \int_0^{k\pi}\sin y dy\Big) = \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{1}{k^2}\Big[\cos y\Big]_0^{k\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{k^2}\Big((-1)^k - 1\Big) \text{ für alle } k \geq 1
\end{aligned}
$$

   Also ist die Fourierreihe von f^*

$$f^*(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\Big((-1)^k - 1\Big)\cos(kx),$$

   woraus folgt, dass die Fourierreihe von f

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f^*(x) + 1 \\
&= 1 + \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\Big((-1)^k - 1\Big)\cos(kx)
\end{aligned}
$$

   lautet. D.h. $a_0 = 1 + \frac{\pi}{2}$, $a_k = a_k^* \ \ \forall k \geq 1$, $b_k = b_k^* \ \ \forall k \geq 1$.

   Da die Funktion f stückweise stetig differenzierbar ist, und die 2π-periodisch fortgesetzte Funktion stetig ist, konvergiert die Fourierreihe von f an jeder Stelle gegen f, also insbesondere auch an der Stelle π gegen $f(\pi) = 1 + \pi$.

2. Mit dem Separationsansatz ($u(x,t) = X(x)T(t)$) ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&(\operatorname{tg} x)X'(x)T(t) - X(x)T''(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \\
&(\operatorname{tg} x)\frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.
\end{aligned}
$$

   Lösung für $T(t)$: Die Char. Gleichung hat Wurzeln $\pm\sqrt{\lambda}$, damit ist

$$
\begin{aligned}
&\lambda < 0 \ : \ T(t) = D\sin(\sqrt{|\lambda|}t) + E\cos(\sqrt{|\lambda|}t) \\
&\lambda > 0 \ : \ T(t) = A\exp\{\sqrt{\lambda}t\} + B\exp\{-\sqrt{\lambda}t\}.
\end{aligned}
$$

Siehe nächstes Blatt!

($\lambda = 0$ ergibt die triviale Lösung $T(t) = 0$.) Wegen der Anforderung $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$ muss gelten $T(t) = B\exp\{-\sqrt{\lambda}t\}$ mit $\lambda > 0$ und $B \in \mathbb{R}$.
Für $X(x)$ ergibt sich nun mit Separation der Variablen und dem Hinweis folgendes:

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{\cos x}{\sin x}\,\lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}X}{X} = \frac{\cos x}{\sin x}\,\lambda \mathrm{d}x$$
$$\Longrightarrow \quad \ln(X) = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\lambda \mathrm{d}x = \lambda \ln|\sin x| + C_0 \quad \Longrightarrow \quad X(x) = C|\sin x|^{\lambda},$$

wobei $C = \exp(C_0)$. Auf dem Intervall $[0,\pi]$ gilt $\sin x \geq 0$. Somit lautet nach dem Separationsansatz die allgemeine Lösung zur PDE

$$u(x,t) = C(\sin x)^{\lambda}\exp\{-\sqrt{\lambda}t\}$$

für beliebige Konstanten $\lambda > 0$, $C \in \mathbb{R}$.